Lec 28 二阶常微分方程

28.1 降阶法

1. 缺 y 型,$y'' = f(x, y')$. 令 $y' = p$, 则 $y'' = p'$. 代入原方程得 $p' = f(x, p)$. 解出 p, 再积分得 y.
2. 缺 x 型,$y'' = f(y, y')$. 令 $y' = p$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 代入原方程得 $p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$. 解出 p, 再积分得 y.

28.2 二阶线性 ODE 解的结构

注 助教注:34.2 节的内容仅有下面第一条定理, 其他的都说对第一条定理的证明, 助教认为剩下的证明过程如果理解不便, 可以在对着定理做几道题目之后再回来看证明.

定理 28.1 (二阶线性 ODE 解的结构)

二阶 ODE 的形式通常为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{2}$$

对应的齐次方程是

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3}$$

如果我们知道 (3) 的两个线性无关解 $y_1(x), y_2(x)$(有时候称为齐通解), 知道 (2) 的一个解 $y^*(x)$(有时候称为特解), 那么 (2) 的通解为 $y(x) = y^*(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

例 28.1 求解 $y'' + y = x$.

解 我们之后会讲如何注意到他的齐通解. 我们这里直接注意到:

$\sin x, \cos x$ 是齐次方程 $y'' + y = 0$ 的两个线性无关解,x 是非齐次方程 $y'' + y = x$ 的一个特解. 所以通解为 $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x$.

以下是对如上定理的证明.

定理 28.2

若 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 (3) 的解, 其中 c_1, c_2 是任意常数, 则 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的线性组合

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

也是方程 (3) 的解.

定理**??** 表明, 齐次方程的解集具有线性结构, 这也是线性方程程称谓的由来. 对于齐次方程 (2), 容易验证如下定理:

定理 28.3

若 $y_1(x), y_2(x)$ 是非齐次方程 (2) 的两个解, 则 $y_1(x) - y_2(x)$ 是齐次方程 (3) 的解,$y_0(x) = y_1(x) - y_2(x)$ 也是齐次方程 (2) 的解.

从以上两个定理可以发现, 如果我们能够求出齐次方程 (3) 的通解, 以及非齐次方程 (2) 的一个解（称之为特解）, 就可以得到非齐次方程 (2) 的通解. 为了寻求齐次方程线性方程的解.

定义 28.1

设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 是区间 I 上的两个可导函数. 称

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$$

为 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 的 Wronski（朗斯基）行列式.

容易验证, 如果函数组 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 线性相关, 即存在不全为零的常数 c_1, c_2 满足 $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = 0$, 则导得 $\varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) = 0$ 也就是说两个线性方程联系有非零解, 因此外的系数行列式, 即它们的 Wronski 行列式等于零. 然而, 当两个函数是齐次方程 (3) 的解时, 结果就不同了.

定理 28.4

函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次方程 (3) 的两个解, 则它们在区间 I 上线性相关的充分必要条件是这两个解的 Wronski 行列式在区间 I 上恒为零.

证明 必要性: 正如上面的验证结果, 当 $y_1(x), y_2(x)$ 线性相关时, 线性方程组 $c_1y_1(x)+c_2y_2(x) = 0$ 有非零解, 所以系数行列式, 即 $y_1(x), y_2(x)$ 的 Wronski 行列式等于零.

充分性：在 I 内任意一点 x_0, 根据条件有

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

由此存在在不全为零的常数 c_1, c_2 满足

$$c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = 0, \quad c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = 0.$$

设 $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, 根据定理**??** 知 $y(x)$ 是齐次方程 (3) 的解, 且满足初始条件

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0.$$

因此一定是零解, 即 $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 的线性无关为一个基本解组.

定理 28.5

齐次方程 (3) 两个解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的 Wronski 行列式可表示为下列 Liouville（刘维尔）公式

证明 因为 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 (3) 的解, 所以有

$$y_1''(x) = -p(x)y_1'(x) - q(x)y_1(x),$$

$$y_2''(x) = -p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x).$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} = y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) = -p(x)(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)) = -p(x)W(x).$$

两端积分得

$$\int \frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int -p(x)W(x)\,\mathrm{d}x.$$

这说明 $W(x) = W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t}$.

两端乘以 $\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t}$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(W(x)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t}\right) = 0.$$

这说明

$$W(x)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t}C,$$

是常数, 即 $W(x_0) = C$.

结合上面两个定理, 我们有以下的定理.

定理 28.6

设函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是齐次方程 (3) 的一对线性无关解, 则该方程的任何一个解可以表示为

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

其中 c_1, c_2 为常数.

证明 在 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的定义域内取一点 x_0. 由于两个函数的线性无关性, 知

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

设 $y(x)$ 是方程 (3) 的任一非零解, 则以 $W(x)$ 中元素为系数的下列线性方程

$$c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = 0, \quad c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = 0$$

存在唯一一组非零解 c_1, c_2. 令 $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, 则 $y(x)$ 也是方程 (3) 的解.

根据初值问题的唯一性可得 $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, 即方程 (3) 的一对线性无关解称为一个基本解组.

28.3 二阶线性 ODE 解法

若我们已知一个 (3) 的非零解 $y_1(x)$, 我们可以用下面的方法求另一个解 $y_2(x)$.

命题 28.1

设已知一个非零解 $y_1(x)$, 因为

$$W(x)=y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)=W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\,\mathrm{d}t},$$

不妨设 $W(x_0)=1$. 从上述式得

$$\frac{y_1(x)y_2(x)-y_1'(x)y_2(x)}{y_1^2(x)}=\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\,\mathrm{d}t},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{y_1^2(x)}\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\,\mathrm{d}t}.$$

积分可得

$$y_2(x)=y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{1}{y_1^2(x)}\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x.$$

显然,$y_2(x)$ 与 $y_1(x)$ 的 Wronski 行列式不等于零, 因此两者构成方程 (3) 的基本解组. ♠

例 28.2 求解 $y''=\dfrac{2x}{1+x^2}y'$.

解 不难看出 $y=1$ 是方程 $y''=\dfrac{2x}{1+x^2}y'$ 的一个解.

因此 $y_2(x)=y_1(x)\displaystyle\int\frac{1}{y_1^2(x)}\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=1\int\frac{1}{1}\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{\ln(1+x^2)}\,\mathrm{d}x=\int(1+x^2)\,\mathrm{d}x=x+\frac{x^3}{3}$. 所以通解为 $y=C_1+C_2(x+\dfrac{x^3}{3})$.

注 助教注: 使用 Liouville 公式的时候, 对于其中的每一个不定积分可以不加 C, 因为 C 会在最后的 C_1,C_2 中体现出来.

例 28.3 $yy''-(y')^2=y^4, y(0)=1, y'(0)=1$.

解 属于可降阶方程 (不是线性方程), 缺失 x, 令 $y'=u$, 则原方程变为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}-\dfrac{1}{y}u=y^3u^{-1}$. 令 $u^2=p(y)$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-\dfrac{2}{y}p(y)=2y^3$.

求解得 $p(y)=y^2(y^2+C_1), u^2=y^2(y^2+C_1)$. 代入 $y=1, y'=u=1$ 得 $C_1=0$, 所以 $u=y^2$. 所以 $y'=y^2$($y'=-y^2$ 不符合初值条件), 所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}x\Rightarrow-\dfrac{1}{y}=x+C\Rightarrow y=\dfrac{1}{C-x}$, 代入 $y(0)=1$ 得 $C=1$, 代入 $y'(0)=1$ 得 $C=0$, 所以 $y=\dfrac{1}{1-x}$.

例 28.4 已知 $(1+x^2)y''+2xy'=6x^2+2$ 的一个特解 $y^*(x)=x^2$, 求通解.

解 先要求出 $(1+x^2)y''+2xy'=0$ 的一个基本解组. 不难看出 $y\equiv1$ 是此齐次方程的一个解. 因此

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=x+\frac{x^3}{3}.$$

所以通解为 $y=y^*(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=x^2+C_1+C_2(x+\dfrac{x^3}{3})$.

事实上, 我们可以将 2 阶 ODE 的解的结构推广至 3 阶 ODE,n 阶 ODE.

定理 28.7

设 $y^{(3)}+p(x)y''+q(x)y'+\gamma(x)y=0, p,q,\gamma\in C(I)$. 若 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 是方程的解, 记 $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x)\\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x)\end{vmatrix}$, 则

1. $W'(x)=-p(x)W(x)$.
2. $W(x)=W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\,\mathrm{d}s}$.
3. $W(x)\equiv 0,\forall x\in I\Leftrightarrow y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 线性相关.
4. $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 线性无关的充要条件是 $W(x)\neq 0,\forall x\in I$. 此时, 方程的通解为 $y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$.
5. 若 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 是 $y^{(3)}+p(x)y''+q(x)y'+\gamma(x)y=0$ 的一个基本解组,$y^*(x)$ 是 $y^{(3)}+p(x)y''+q(x)y'+\gamma(x)y=f(x)$ 的一个特解, 则 $y^{(3)}+p(x)y''+q(x)y'+\gamma(x)y=f(x)$ 的通解为 $y=y^*(x)+C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$.

推广至 n 阶 ODE 也有类似的结论, 这里不再赘述.

作业 ex6.2:1,2,3;ex6.1:12(3)(4),13(2).